
Questions Géométrie différentielle

Table des matières

1	Fonction différentiables dans \mathbb{R}^n et applications différentiables de \mathbb{R}^n à \mathbb{R}^m . La différentielle comme une application linéaire. Applications de classe C^r	4
2	Théorème d'inversion locale (énoncé). Dérivation d'applications composées en termes de différentielle. Computation de l'intégrale Gaussienne.	7
3	Sous-variétés de \mathbb{R}^n , immersions, submersions avec définitions et exemples.	9
4	La forme normale pour une submersion. Caractérisation locale d'une sous-variété par submersions.	10
5	La forme normale pour une immersion. Caractérisation locale d'une sous-variété par immersions.	12
6	Points et valeurs régulières et critiques. Théorème de Sard (énoncé pour les applications de \mathbb{R}^n à \mathbb{R}^m et démonstration pour le cas $m = n = 1$).	13
7	Variétés différentielles abstraites : cartes, compatibilité de cartes, atlas, équivalence d'atlas, topologie induite.	15
8	Structure de variété différentielle, dénombrabilité et séparabilité pour les atlas et les propriétés topologiques correspondantes.	17
9	Exemples de variétés différentielles : Cercle / Tore / Plan Projectif	20
10	Applications différentielles, plongements et difféomorphismes entre des variétés différentielles, le théorème de Whitney (énoncé).	21
11	Courbes et vecteurs tangents. L'espace tangent en un point d'une variété différentielle.	22
12	Applications tangentés (les différentielles d'applications entre les variétés lisses). Vecteurs tangents comme dérivations.	23
13	Le fibré tangent comme une variété lisse	26
14	Parallélisabilité de variétés lisses. Exemples de variétés parallélisables.	29
15	Orientabilité d'espaces vectoriels et de variétés lisses.	31

16	Orientabilité et parallélisabilité. Exemples de variétés non-parallélisables.	33
17	Champs de vecteurs sur la sphère. Existence d'un point singulier (énoncé). L'indice d'un point singulier.	35
18	Le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles ordinaires (énoncé) et ses corollaires.	38

Sommaire des questions :

- Q1 : Tip Top
- Q2 :
- Q7 : Rajouter des choses encore, c'est trop faible
- Q8 : Presque parfait, il faut juste faire quelque chose sur les fonctions lisses. C'est pas super clair encore.
- Q9 : A FAIRE
- Q10 : A FAIRE
- Q11 : Rajouter les espaces tangents
- Q12 : Vecteurs tangents pas trop compliqué, pas encore compris les applications tangentes (différentielles d'applications entre variétés)
- Q13 : Tip Top
- Q14 : La linéarité de $T_x M$ est pas clair et du coup je sais exactement comment bien expliquer les exemples.
- Q15 : Ça a l'air clean, mais est-ce que ça l'est vraiment ? Bonne question...
- Q16 : Pas mal. J'ai mieux compris comment fonctionne le Ruban de Möbius.
- Q17 : Pas mal. Champs de vecteurs OK. Indices de du point singulier à finir bien.
- Q18 :

1 Fonction différentiables dans \mathbb{R}^n et applications différentiables de \mathbb{R}^n à \mathbb{R}^m . La différentielle comme une application linéaire. Applications de classe C^r

Définition

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la différentielle de cette fonction en x_0 est une application linéaire qui approxime f autour de x_0 . On la note $(df)_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et elle satisfait $f(x_0 + h) = f(x_0) + (df)_{x_0}(h) + o(|h|)$

Rappel $o(|h|)$

$o(|h|) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application qui satisfait :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|h|)}{|h|} = 0$$

Cas des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Pour les fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , on prend les choses par coordonnées : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x_0 + h) = (df)_{x_0}(h) + o(|h|)$ où $(df)_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction linéaire et $h \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

La différentielle est définie par le Jacobien de f en x_0 :

$$(df)_{x_0}(h) = J_{x_0}(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) (h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)h_n$$

Unicité de la différentielle

Pour une fonction générale $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, si on a deux différentielles différentes, alors $f(x_0 + h) = f(x_0) + (\tilde{d}f)_{x_0}h + o(|h|) \implies (df)_{x_0}h - (\tilde{d}f)_{x_0}h = o(|h|) \implies (df)_{x_0} = (\tilde{d}f)_{x_0}$ Donc la différentielle est unique.

Cas des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Maintenant, on a une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la matrice Jacobienne qui définit la différentielle est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Et donc la différentielle en x_0 est $J_{x_0} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ (On fait la multiplication matricielle)

Fonction différentiable

Une fonction est dite différentiable si $(df)_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existe pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Fonction continuellement différentiable

Une fonction est dite continuellement différentiable si $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ existe et est une fonction continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} pour tout $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Fonctions de classe C^r et C^∞

Une fonction f est de classe C^r si toutes les dérivées partielles d'ordre $\leq r$ existent et sont des fonctions continues.

Une fonction f est de classe C^∞ si toutes les dérivées partielles de tous les ordres existent et sont des fonctions continues.

Si ce n'est pas précisé, les fonctions que l'on va utiliser plus tard dans le cours sont toutes de classe C^∞ .

On peut utiliser ces mêmes définitions pour des fonctions définies entre ouverts :

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$$

Difféomorphisme

Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ est appelée un difféomorphisme si il existe une fonction $g : V \rightarrow U$ telle que $f \circ g = Id_V$ et $g \circ f = Id_U$. Il faut aussi que f et g soient continûment différentiables.

On peut parler de difféomorphismes de classe C^r ou C^∞ .

Ouverts difféomorphes

U et V sont dits difféomorphes si un difféomorphisme entre U et V existe.

Deux ouverts difféomorphes sont issus d'espaces de la même dimension ($m = n$).

Si f est le difféomorphisme entre U et V , alors $(df)_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ admet une application linéaire inverse : $(dg)_{f(x_0)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$(df)_{x_0}$ est un isomorphisme linéaire, donc $n = m$, on a ce que l'on voulait démontrer.

2 Théorème d'inversion locale (énoncé). Dérivation d'applications composées en termes de différentielle. Computation de l'intégrale Gaussienne.

Théorème 1. *Théorème d'inversion locale*

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ et $f : U \rightarrow V$ une fonction continuellement différentiable et $x_0 \in U$ (juste un point) tels que $(df)_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un isomorphisme.

Alors f est un difféomorphisme local.

C'est à dire que pour $f(x_0) \ni A \subset V$, $\exists g : A \rightarrow U$ tel que $g \circ f(x) = x$ si $f(x) \in A$ et $f \circ g(y) = y$ si $y \in A$.

Cela implique que $n = m$ parce que $(df)_{x_0}$ est un isomorphisme.

Difféomorphisme local

$\exists W \subset U$, tel que $x \in W$ un ouvert tel que $f|_W : W \rightarrow f(W)$ est un difféomorphisme.

Dérivation de fonctions composées

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ et $W \subset \mathbb{R}^l$ des ouverts. Soient $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow W$ deux fonctions de classe C^r avec $r \geq 1$.

Alors $g \circ f : U \rightarrow W$ est une aussi une fonction de classe C^r et sa différentielle est définie par :

$$d(g \circ f)_{x_0} = (dg)_{f(x_0)} \circ (df)_{x_0}$$

Computation de l'intégrale Gaussienne

$$\sqrt{\pi} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx}_{=I} = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

On a aussi $\frac{I^2}{4} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

On passe maintenant aux coordonnées polaires :

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi), r \in [0, +\infty)$$

$$\frac{I^2}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{+\infty} e^{-r} r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \frac{dr^2}{2} = \frac{\pi}{4} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr^2 = \frac{\pi}{4}$$

Dessin de changement de coordonnées, mais je pense qu'on s'en fout.

On a ici un difféomorphisme entre $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ et $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, +\infty)$.

On a aussi un deuxième difféomorphisme entre $(0, +\infty)$ et $(0, +\infty)$ qui envoie r sur r^2 .

3 Sous-variétés de \mathbb{R}^n , immersions, submersions avec définitions et exemples.

Sous-variété

Une sous-variété (fermée) $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimension k est un sous-ensemble (fermé) tel que $\forall p \in V$, il existe un voisinage U contenant p et un difféomorphisme $\Phi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ où W est un ouvert tels que $\Phi(p) = 0$ et $\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = U \cap V$.

Sous-variété de dimension 1 : Exemple

Montrons que S^1 est une sous-variété de degré 1.

Prenons le point $p = (0, 1)$. Au voisinage de p , on peut paramétriser le cercle par $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y > 0$. On prend donc que l'hémisphère Nord. Prenons le voisinage $U = (-1, 1) \times (0, +\infty) \subset \mathbb{R}^2$ et le difféomorphisme $\Phi(x, y) = (x, y - \sqrt{1 - x^2})$. Φ est une fonction C^∞ lisse.

Montrons maintenant que W est bien un ouvert et que $\Phi(p) = (0, 0)$. $W = \{-1 < x < 1, y > -\sqrt{1 - x^2}\}$ est ouvert et $\Phi(p) = (0, 0)$ pour $p = (0, 1)$.

Il faut encore vérifier que $\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = U \cap V$. Pour cela, il faut d'abord trouver la fonction inverse de Φ . Il suffit de prendre $\Psi(x, y) = (x, y + \sqrt{1 - x^2})$ et $\Phi \circ \Psi = Id$ ainsi que $\Psi \circ \Phi = Id$. Et on peut voir que $\Psi(\mathbb{R} \times \{0\}) = U \cap S^1$. On a donc toutes les conditions pour que S^1 soit une sous-variété de dimension 1.

FINI!

Immersion et Submersions

Prenons une application lisse $\Psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ avec $p \in U$.

Ψ est une *submersion* en p si $(d\Psi)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est surjective, donc si $n \geq n - k$.

Ψ est une *immersion* en p si $(d\Psi)_p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ est injective, donc si $k \leq n$.

Si c'est une submersion/immersion en tout point p , alors on dit que c'est une submersion/immersion tout court.

Rajouter des exemples d'immersions et submersions.

4 La forme normale pour une submersion. Caractérisation locale d'une sous-variété par submersions.

Théorème 2. *Forme normale d'une submersion*

Si $\Psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est une submersion en $p \in U$, alors $\exists W \subset U$ avec $p \in W$ et un difféomorphisme sur son image $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que $\Psi \circ \Phi(x_1, \dots, x_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ si $(x_1, \dots, x_n) \in W$.

Autrement dit, à difféomorphisme local près, Φ est donné par les $n - k$ dernières coordonnées.

Preuve du Théorème

Soit $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ où $(d\Psi)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est surjective. Considérons $N = Ker((d\Psi)_p) \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace linéaire de dimension k . À une permutation de coordonnée près, nous pouvons supposer que la projection $\pi : N \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_k)$ sur les k premières coordonnées est surjective, c'est à dire que $\pi(N) = \mathbb{R}^k$.

Définissons $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ par $\Phi(x_1, \dots, x_n) = (\underbrace{(x_1, \dots, x_k)}_{\in \mathbb{R}^k}, \underbrace{\Psi(x_1, \dots, x_n)}_{\in \mathbb{R}^{n-k}})$

De plus, $(d\Phi)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est bijective car $(Ker(d\Phi))_p = N \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) = \{0\}$.

En effet, quand on écrit $(d\Phi)_p$:

$$(d\Phi)_p = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ (d\Psi)_p & \end{pmatrix}$$

Et donc, pour que $(d\Phi)_p(x) = 0$, les k premières coordonnées doivent être 0, et ensuite les $n - k$ suivantes doivent se trouver dans N , donc dans $Ker(d\Psi)_p$. On a donc bel et bien $(Ker(d\Phi))_p = N \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) = \{0\}$. Φ est une application continûment différentiable (π et Ψ le sont) et on vient de montrer que $(d\Phi)_p$ est une bijection, donc un isomorphisme. On a donc toutes les hypothèses du Théorème d'inversion locale. Donc $\Phi : p \in U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme local ce qui nous donne :

$\Phi : p \in U \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $\exists W \subset U$ avec $p \in W$ tel que $\Phi|_W : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme sur son image.

On rappelle que $\Phi(x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_k), \Psi(x_1, \dots, x_n))$.

Soit $\pi_{n-k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ définie par $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{k+1}, \dots, x_n)$. On définit juste une nouvelle projection.

$\pi_{n-k} \circ \Phi|_W = \Psi|_W$ car notre projection nous retourne juste les $n - k$ dernières coordonnées, donc $\Psi(x_1, \dots, x_n)$.

On sait que $(\Phi|_W)^{-1}$ existe par le Théorème d'inversion local car $\Phi|_W$ est un difféomorphisme et possède donc une fonction inverse. Donc $\pi_{n-k} = \Psi \circ (\Phi|_W)^{-1}$.

On est finalement bien arrivé à ce que l'on voulait montrer, c'est à dire, $(x_{k+1}, \dots, x_n) = \pi_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = \Psi \circ \tilde{\Phi}(x_1, \dots, x_n)$. $\tilde{\Phi}$, c'est juste $(\Phi|_W)^{-1}$ pour que l'on ait exactement ce qu'il y a dans le Théorème.

□

Corollaire

Si $V \subset U$ ouvert $\subset \mathbb{R}^n$ est donné par $V = \Psi^{-1}(0)$ pour une application $\Psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ où Ψ est une submersion $\forall p \in V$.

La préimage de 0 d'une submersion est une sous-variété.

$\implies V$ est une sous-variété.

Preuve que le Théorème implique le Corollaire

Soit V une sous-variété et prenons la submersion en $p \in V$ $\Psi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$. On sait que le difféomorphisme $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ donné par la Formule normale de la submersion satisfait $\Psi \circ \Phi(x_1, \dots, x_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n)$.

Regardons le difféomorphisme $\Phi - \Phi(p) : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ que l'on note $\tilde{\Phi}$. En particulier, il envoie p sur 0, donc $\tilde{\Phi}(p) = 0$ et on veut encore montrer que tous les éléments de V sont envoyés sur 0 pour que l'on ait bien $\tilde{\Phi}^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = V$.

Mais $x_{k+1} = \dots = x_n = 0 \iff \tilde{\Phi}(x_1, \dots, x_n) \in V$, donc on a montré $\tilde{\Phi}^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = V$.

5 La forme normale pour une immersion. Caractérisation locale d'une sous-variété par immersions.

Théorème 3. *Forme normale d'une immersion*

Soit $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une immersion en $p \in U$ avec $n \leq m$. Alors il existe un difféomorphisme local Ψ de \mathbb{R}^m autour de $\varphi(p)$ tel que :

$$\Phi \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \varphi^{-1}(W), \exists W \ni \varphi(p), W \subset \mathbb{R}^m$ avec $\Psi : W \rightarrow \Psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ difféomorphisme.

Preuve du Théorème

$(d\varphi)_p$ est injective $\implies A = (d\varphi)_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m \implies \exists \alpha : \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire telle que A et $B = \alpha(\mathbb{R}^{m-n})$ engendrent $\mathbb{R}^m = A \oplus B$, c'est à dire que $\forall u \in \mathbb{R}^m, \exists a \in A, b \in B$ et $u = a + b$

Définissons $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ par $\Phi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-n}) = \varphi(x_1, \dots, x_n) + \alpha(y_1, \dots, y_{m-n})$. $(d\Phi)_p$ est surjective entre \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n car $(d\varphi)_p(\mathbb{R}^n) = A, (d\alpha)_p(\mathbb{R}^{m-n}) = B$ engendrent \mathbb{R}^m .

$\implies (d\Phi)_p$ est bijective $\implies \Phi$ est un difféomorphisme local en p par l'inversion locale.

Donc il existe $\Psi = \Phi^{-1}$ localement un difféomorphisme local de \mathbb{R}^m autour de $\varphi(p) = \Phi(p, 0)$.

$\Psi \circ \varphi = \Phi^{-1} \circ \varphi \implies \Psi \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ car $y_1 = \dots = y_n = 0 \implies \alpha(y_1, \dots, y_n) = 0$ □

Corollaire

Si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une immersion injective, alors $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ est une sous-variété de dimension n .

Preuve du Corollaire

Considérons la forme normale pour φ en $p \in U$. Cela nous donne un difféomorphisme local $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ (un changement de coordonnées). $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$. $V = \varphi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ (localement). $V \subset \mathbb{R}^m$ et $V = \varphi(U)$ et pour $p \in V, \varphi^{-1}(p)$ doit être unique.

6 Points et valeurs régulières et critiques. Théorème de Sard (énoncé pour les applications de \mathbb{R}^n à \mathbb{R}^m et démonstration pour le cas $m = n = 1$).

Définition

Soit $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application lisse et $p \in \mathbb{R}^m$ un point.

- p est une **valeur régulière** si φ est une submersion $\forall x \in \varphi^{-1}(p)$
- p est une **valeur critique** sinon.

Exemple

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$. 0 est une valeur critique et $p \neq 0$ sont des valeurs régulières.

Définition

$x \in U$ est un point régulier de Φ (ou x est régulier) si $(d\Phi)_x$ est surjective, Sinon, c'est un point critique de Φ .

$y \in \mathbb{R}^m$ est une valeur régulière de Φ si $\forall x \in \Phi^{-1}(y)$, x est un point régulier, sinon y est une valeur critique.

Corollaire

Soit $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application lisse et $p \in \mathbb{R}^m$. Si p est une valeur régulière pour φ , alors $\varphi^{-1}(p)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n .

Théorème 4. (Sard) Les valeurs critiques d'une application lisse de classe C^r avec $r \geq 1, r \geq n - m + 1$ $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ forment un ensemble de mesure nulle.

Rappel

$B \subset \mathbb{R}^m$ est une ensemble de mesure nulle si $\forall \varepsilon > 0$, il existe une collection de boules B_n de volume $vol(B_n)$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} vol(B_n) < \varepsilon$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n) \supset B \implies \text{Int}(B) = \emptyset$$

B est assez "petit".

Preuve du Théorème pour $m = n = 1$

Prouvons le Théorème pour $m = n = 1$:

Prenons une fonction $\Phi : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable. Soit $K \subset U$ un compact et définissons $D_K := \{\Phi(x) \mid x \in K \text{ un point critique}\}$. $\Phi' : U \rightarrow \mathbb{R}$ est continue car Φ' est lisse de classe C^r et donc sa première dérivée est continue.

$\implies \Phi'|_K$ est uniformément continue comme elle l'est définie sur le compact K , c'est à dire que $\forall \varepsilon, \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta, x, y \in K \implies |\Phi'(x) - \Phi'(y)| < \varepsilon$

Considérons la répartition de K par les intervalles I_j de longueurs $< \delta$. Si I_j contient un point critique x , alors on a $\Phi'(x) = 0$. Comme Φ' est uniformément continue, on a que si $|x - y| < \delta$, alors $|\Phi'(x) - \Phi'(y)| = |\Phi'(y)| < \varepsilon \forall y \in I_j$. Donc $|\Phi'(I_j)| < \varepsilon |I_j|$. Et donc, D_K est contenu dans la réunion des intervalles de longueur totale $< \varepsilon \text{diam}(K)$. Cela implique que D_K est de mesure nulle et donc D_U , qui est l'ensemble des points critiques est de mesure nulle aussi. \square

Exemple

L'ensemble des points critiques n'est pas toujours de mesure nulle, mais l'ensemble des valeurs critiques est de mesure nulle. On peut voir ça par exemple si Φ est constante. Dans ce cas, tout $x \in U$ est critique, mais $\Phi(x)$ n'a qu'une seule valeur critique.

7 Variétés différentielles abstraites : cartes, compatibilité de cartes, atlas, équivalence d'atlas, topologie induite.

Prenons sur sous-variété M de \mathbb{R}^l . On veut définir une structure de variété lisse sur M , c'est à dire un espace topologique où nous pourrions considérer les applications lisses, les difféomorphismes, les différentielles etc.

Définition de carte

Une carte $\varphi : W \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ est une bijection entre un sous-ensemble W de M et un ouvert U de \mathbb{R}^n .

En gros, W est la même chose que notre ouvert U de \mathbb{R}^n . Donc W va se comporter de la même manière que U , ce sera alors plus facile à étudier.

Définition de cartes compatibles

Soient $\varphi_1 : W_1 \subset M \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $\varphi_2 : W_2 \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^n$ deux cartes. On dit que φ_1 et φ_2 sont dites **compatibles** si $\varphi_1(W_1 \cap W_2) \subset \mathbb{R}^n$ et $\varphi_2(W_1 \cap W_2) \subset \mathbb{R}^n$ sont ouverts et $\varphi_{21} : \varphi_1(W_1 \cap W_2) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_2(W_1 \cap W_2) \subset \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi_{21}(x) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))$ appelée l'application de changement de carte est un difféomorphisme.

Définition d'un atlas

Un atlas est une collection de cartes $\{\varphi_\alpha : W_\alpha \rightarrow U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ avec 2 conditions :

- Toutes les cartes sont compatibles entre elles.
- $\bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha = M$, c'est à dire $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement de M .

Un atlas nous permet d'étudier tout M avec des ouverts de \mathbb{R}^n .

Définition d'équivalence d'atlas

Deux atlas sont équivalents si leur union est aussi un atlas. Cela implique donc que toutes les cartes du premier atlas sont compatibles avec toutes les cartes du second.

Encore quelque chose sur la topologie induite ?

Mettre la structure de variété différentielle dedans aussi ?

A voir, je reviendrais dessus plus tard.

8 Structure de variété différentielle, dénombrabilité et séparabilité pour les atlas et les propriétés topologiques correspondantes.

Définition de la structure d'une variété différentielle

La structure d'une variété différentielle sur un ensemble M est une classe d'équivalence d'atlas. Cette structure nous donne :

- Une topologie sur M .
- Des fonctions lisses sur M .

1) Dans la topologie sur M , $Y \subset M$ est un ouvert si $\forall \alpha \in A$, $\varphi_\alpha(Y \cap W_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. Vérifions maintenant que les ouverts que l'on vient de définir nous donnent une topologie.

- \emptyset est ouvert car $\emptyset = \varphi_\alpha(\emptyset \cap W_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert.
- $M \subset M$ est ouvert car $U_\alpha = \varphi_\alpha(M \cap W_\alpha) = \varphi_\alpha(W_\alpha)$ est ouvert par la définition de cartes.
- Prenons un ensemble d'ouverts $\{Y_j\}_{j \in B}$, $Y_j \subset M$, $j \in B$.

Alors $\bigcup_{j \in B} Y_j$ est ouvert et $\bigcap_{j \in B} Y_j$ est ouvert si B est fini car $\varphi_\alpha \left(\bigcup_{j \in B} Y_j \cap W_\alpha \right) = \bigcup_{j \in B} \varphi_\alpha(Y_j) \cap \varphi_\alpha(W_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert $\forall \alpha \in A$. On a pu sortir φ_α car c'est une bijection par la définition de cartes. On fait la même chose pour une intersection finie.

Donc les 3 conditions pour que ce soit une topologie sont satisfaites.

2) Fonctions lisses sur M muni d'une structure de variété différentiable.

Soient un ouvert $W \subset M$ et $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. f est lisse si f est lisse en cartes, c'est à dire que $\forall \alpha$, $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(W \cap W_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse.

REGARDER LA VIDEO POUR COMPRENDRE

DESSIN D'UNE FONCTION LISSE

RIEN COMPRIS, A COMPLETER

Définition

Un atlas $\{\varphi_\alpha : W_\alpha \rightarrow U_\alpha\}$ sur M est appelé séparable si $\forall x, y \in M$:

- soit $\exists \alpha$ tel que $x, y \in W_\alpha$
- soit $\exists \alpha, \beta$ tels que $x \in W_\alpha, y \in W_\beta$ et $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$

Définition

Une structure de variété lisse sur M est séparable si elle admet un atlas séparable. Elle est dénombrable si elle admet un atlas dénombrable.

Définition

Une variété lisse (différentiable) est une ensemble M muni d'une structure de variété différentiable qui est séparable et dénombrable.

Rappel

Séparabilité

X est un espace topologique séparé si $\forall x, y, \exists U_x, U_y \subset X$ ouverts, $x \in U_x, y \in U_y, U_x \cap U_y = \emptyset$

Pour une variété lisse M , nous avons deux définitions de séparabilité :

- 1) M admet un atlas séparé
- 2) M est séparé comme un espace topologique

Proposition

Les deux propriétés sont équivalentes.

Preuve de la Propriété

M admet un atlas séparé $\implies M$ est séparé comme un espace topologique.

Cas 1 : Soit $\exists \alpha$ tel que $x, y \in W_\alpha$: Si $\exists \alpha$ tel que $x, y \in W_\alpha$, alors $\exists U_x, U_y$ tels que $\varphi_\alpha(x) \in U_x$ et $\varphi_\alpha(y) \in U_y$ et $U_x \cap U_y = \emptyset$ car \mathbb{R}^n est séparé. On voit ici φ_α et φ_β comme 2 points de \mathbb{R}^n et on utilise la séparabilité de \mathbb{R}^n . Cela implique que $\varphi_\alpha^{-1}(U_x) \cap \varphi_\alpha^{-1}(U_y) = \emptyset$. $\varphi_\alpha^{-1}(U_x)$ et $\varphi_\alpha^{-1}(U_y)$ sont deux ouverts de M et donc M est séparé selon la définition topologique.

Cas 2 : Soit $\exists \alpha, \beta$ tels que $x \in W_\alpha, y \in W_\beta$ et $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$. Si $\exists x \in W_\alpha, y \in W_\beta, W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$, nous prenons des voisinages ouverts de W_α et W_β et cela nous donne $N_\alpha \subset W_\alpha$ et $N_\beta \subset W_\beta$ ouverts avec $x \in N_\alpha$ et $y \in W_\beta$ et $N_\alpha \cap N_\beta = \emptyset$, donc M est séparé selon la définition topologique.

En fait, il y avait pas vraiment besoin de prendre des voisinages de W_α et W_β car $W_\alpha \subset M$ est ouvert $\forall \alpha \in A$ et $\forall \beta \in A$ car $\varphi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert par compatibilité de cartes.

Donc M est séparé comme un espace topologique si M admet un atlas séparé.

M est séparé comme un espace topologique $\implies M$ admet un atlas séparé. Supposons que M est un espace topologique séparé. Est-ce qu'il existe un atlas A tel que $\forall x, y \in M, \exists \alpha, \beta \in A : x \in W_\alpha, y \in W_\beta$ et $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ où $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement de M .

On sait qu'il existe $\alpha, \beta \in A$ avec $x \in W_\alpha$ et $y \in W_\beta$, mais peut être $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$

Par séparabilité topologique, $\exists U_x, U_y \subset M$ deux ouverts avec $x \in U_x$ et $y \in U_y$ tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Notons que $\varphi_\alpha|_{W_\alpha \cap U_x} : W_\alpha \cap U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte compatible avec A . (Lemme prouvé plus bas)

Nous ajoutons deux nouvelles cartes à notre atlas $A : \varphi_\alpha|_{W_\alpha \cap U_x} : W_\alpha \cap U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varphi_\beta|_{W_\beta \cap U_y} : W_\beta \cap U_y \rightarrow \mathbb{R}^n$, on les note $\varphi_{\alpha x}$ et $\varphi_{\beta y}$.

Ces deux nouvelles cartes sont disjointes, donc $x \in W_{\alpha x}$ et $y \in W_{\beta y}$ et surtout $W_{\alpha x} \cap W_{\beta y} = \emptyset$. On a donc trouvé notre atlas séparé.

Donc M admet un atlas séparé si M est séparé comme un espace topologique. □

Lemme

Soit $\{\varphi_\alpha : W_\alpha \rightarrow U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un atlas sur un ensemble M et $U \subset M$ un ouvert. Alors $\forall \alpha \in A, \varphi_\alpha|_{W_\alpha \cap U} : W_\alpha \cap U \rightarrow \varphi_\alpha(W_\alpha \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ est une carte compatible avec toutes les cartes de A .

Preuve du Lemme

$\varphi_\alpha|_{W_\alpha \cap U}$ est une bijection (sur son image) et $\varphi_\alpha(W_\alpha \cap U)$ est ouvert et cela implique que $\varphi_\alpha|_{W_\alpha \cap U}$ est une carte.

Soit $\varphi_\beta : W_\beta \rightarrow U_\beta$ une carte de A avec $\beta \in A$.

$$\varphi_\beta \left(\varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta \cap U)} \right) : \varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta \cap U) \rightarrow \varphi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta \cap U)$$

est un difféomorphisme car $\varphi_\beta \left(\varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)} \right)$ est un difféomorphisme. □

9 Exemples de variétés différentielles : Cercle / Tore / Plan Projectif

Le cercle comme une variété différentielle

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, t \sim s \text{ si } t - s \in \mathbb{Z} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \text{ définie par } t \rightarrow e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t) \in \mathbb{C}, \mathbb{C} = \mathbb{R}^2.$$

Observation : $\exp|_{(0,1)}$ est bijective car la longueur de $(0,1)$ ouvert ≤ 1 , $\exp|_{(-1/2,1/2)}$ est bijective sur son image aussi.

- $W_0 = \exp((0, 1)) = S^1 \setminus \{1\}$, $U_0 = (0, 1)$, $\varphi_0 = \left(\exp|_{(0,1)}\right)^{-1}$
- $W_1 = \exp((-1/2, 1/2)) = S^1 \setminus \{-1\}$, $U_1 = (-1/2, 1/2)$, $\varphi_1 = \left(\exp|_{(-1/2,1/2)}\right)^{-1}$

L'application de changement de cartes est définie sur les images de $W_0 \cap W_1$ par φ_0 et φ_1 .

$$W_0 \cap W_1 = S^1 \setminus \{-1, 1\}$$

- $\varphi_0(W_0 \cap W_1) = (0, 1) \setminus \{1/2\} = (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$.
- $\varphi_1(W_0 \cap W_1) = (-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$

On a donc le changement de carte : $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} = \begin{cases} t & \text{si } t \in (0, 1/2) \\ t - 1 & \text{si } t \in (1/2, 1) \end{cases}$ Cette application est

lisse sur $(0, 1/2) \cup (1/2, 1)$.

Le changement de carte inverse est :

$$\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1} = \begin{cases} t & \text{si } t \in (0, 1/2) \\ t + 1 & \text{si } t \in (-1/2, 0) \end{cases} \text{ qui est aussi lisse.}$$

\implies les changements de cartes sont difféomorphes $\implies S^1 = (0, 1) \sqcup (-1/2, 1/2) / \sim$
 \sim est donnée par $\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}$, c'est à dire $s = (\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1})(t)$, $s \in (0, 1)$, $t \in (-1/2, 1/2)$

10 Applications différentielles, plongements et difféomorphismes entre des variétés différentielles, le théorème de Whitney (énoncé).

11 Courbes et vecteurs tangents. L'espace tangent en un point d'une variété différentielle.

Définition

Une courbe $\gamma : I \rightarrow M$ est une application lisse d'un intervalle ouvert I et contenant 0. I est donc de la forme : $I = (a, b)$ avec $a < b$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition

Deux courbes $\gamma_1 : I_1 \rightarrow M$ et $\gamma_2 : I_2 \rightarrow M$ sont équivalentes si $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et que pour une carte φ_α qui contient $\gamma_1(0)$: $(\varphi_\alpha \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi_\alpha \circ \gamma_2)'(0) \in \mathbb{R}^n$. Dans \mathbb{R}^n , les deux vecteurs $(\varphi_\alpha \circ \gamma_1)'(0)$ et $(\varphi_\alpha \circ \gamma_2)'(0)$ sont les mêmes et donc tangents à $(\varphi_\alpha \circ \gamma_1)(0) = (\varphi_\alpha \circ \gamma_2)(0)$. Comme φ_α est une bijection, alors on a une structure très similaire dans M . On va utiliser le même vocabulaire, et donc on dit que les deux courbes γ_1 et γ_2 sont tangentes à $x = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$.

$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ est une variété de dimension 1.

$\varphi_\alpha \circ \gamma_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application lisse (composition d'une bijection + application lisse = application lisse?). $0 \in (a, b)$, $(\varphi_\alpha \circ \gamma_1)'(0) \in \mathbb{R}^n$ est bien définie.

Définition

Un vecteur tangent à $x \in M$ est une classe d'équivalence de courbes $\gamma : I \rightarrow M$ telles que $\gamma(0) = x$. Dans cette classe d'équivalence, il va y avoir toutes les courbes telles que $\gamma(0) = x$, donc toutes les courbes γ tangentes à x .

12 Applications tangentes (les différentielles d'applications entre les variétés lisses). Vecteurs tangents comme dérivations.

Définition

Une dérivation à x est une application $D : \text{Funct}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :

$\text{Funct}(M)$ est l'ensemble des fonctions lisses $M \rightarrow \mathbb{R}$. Notons que $\text{Funct}(M)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , c'est à dire que si $f, g \in \text{Funct}(M)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g \in \text{Funct}(M)$.

D , c'est la dérivation et elle vérifie les propriétés suivantes :

- Dépendance locale : $\exists U$ ouvert contenant x tel que $f|_U = g|_U \implies D(f) = D(g)$.
- Linéarité : $D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g)$
- Propriété de Leibnitz : $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot D(g)$ avec $g(x), f(x) \in \mathbb{R}$

Proposition

$\frac{\partial}{\partial v}$ pour $v \in T_x M$ est une dérivation.

Preuve de la Proposition

Prenons $\frac{\partial}{\partial v} : f \rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}$.

La dépendance locale est vérifiée car nous pouvons considérer une courbe contenue dans U .

Si on a $f|_U = g|_U$, alors les dérivées directionnelles de f et g sont les mêmes dans U . En effet, la dérivée directionnelle de f est définie par $\frac{\partial f}{\partial v} = (f \circ \gamma)'(0) = (g \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial g}{\partial v}$ car $f = g$ dans U .

La linéarité et la propriété de Leibnitz sont les propriétés de $(f \circ \gamma)'(0)$ en cartes. \square

Définition, vecteurs tangents par dérivation

Un vecteur tangent $v \in T_x M$ est une dérivation en $x \in M$.

Proposition

Cette définition est équivalente aux deux définitions précédentes.

Preuve de la Proposition

$\frac{\partial}{\partial v}$ nous donne une application qui part de $T_x M$ et qui va vers l'ensemble des dérivations en $x : \frac{\partial}{\partial v}(v) \rightarrow \{f \rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}\}$.

Cette application est un isomorphisme par considérations locales.

Une dérivation est déterminée par les valeurs sur les applications linéaires en \mathbb{R}^n .

□

Remarque

Si D_1, D_2 sont 2 dérivations en x et $\lambda, \mu \in M$, alors $\lambda D_1 + \mu D_2$ est aussi une dérivation en x .

C'est tout sur les vecteurs tangents comme dérivations, parlons des applications tangentes maintenant :

Définition, application tangente

L'application tangente (ou la différentielle) df de f est l'application $(df)_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ définie comme suit :

Soit $v \in T_x M$ représenté par une courbe $\gamma : I \rightarrow M$, alors $(df)_x v$ est représenté par $f \circ \gamma : I \rightarrow N$.

Notons que si $\gamma_1 \sim \gamma_2 : I \rightarrow M$, alors $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2 : I \rightarrow N$

Remarque, application tangentes pas dérivations

Supposons que $D : \text{Funct}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ est une dérivation à x et $g : N \rightarrow \mathbb{R}$. Considérons $g \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ et $g \circ f \in \text{Funct}(M)$

$g \in \text{Funct}(N)$ et $g \rightarrow D(g \circ f) \in \mathbb{R}$ est une dérivation à $f(x)$ (à vérifier) qui coïncide avec l'application tangente.

$$f : M \rightarrow N, x \in M, (df)_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

Proposition

Soient $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow L$ deux applications lisses entre les variétés $M, N, L, x \in M$. Alors $d(g \circ f)_x = (dg)_{f(x)} \circ (df)_x$

Preuve de la Proposition

$v \in T_x M$ représenté par $\gamma : I \rightarrow M$ implique que $(df)_x v$ est représenté par $f \circ \gamma$. Donc $(dg)_{f(x)} \circ (df)_x v$ est représenté par $g \circ f \circ \gamma$. Mais $(d(g \circ f))_x v$ est aussi représenté par $g \circ f \circ \gamma$.

□

13 Le fibré tangent comme une variété lisse

Définition

TM est l'ensemble de tous les vecteurs tangents M (en tous points) et appelé le fibré tangent.

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M \text{ (comme un ensemble)}$$

Construction d'une structure de variété différentiable sur TM à partir des cartes de M

C'est possible de définir la structure d'une variété pour TM en utilisant les mêmes cartes $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow W_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ qu'on a utilisé pour la structure de M .

Considérons $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow W_\alpha \subset \mathbb{R}^n$.

$$TU_\alpha = \bigcup_{x \in U_\alpha} T_x U_\alpha, \text{ c'est juste la définition du fibré tangent sur } U_\alpha.$$

Un vecteur $v \in T_x U_\alpha$ tangent à $x \in U_\alpha$ est représenté par $v_\alpha \in \mathbb{R}^n$ qui est tangeant à $\varphi_\alpha(x)$. Cela nous donne une identification $\tilde{\varphi}_\alpha : TU_\alpha \xrightarrow{\sim} TW_\alpha = W_\alpha \times \mathbb{R}^n$ où $v \in T_x U_\alpha$ est envoyé sur $(\varphi_\alpha(x), v_\alpha) \in W_\alpha \times \mathbb{R}^n$

$\tilde{\varphi}_\alpha$ peut être considérée comme une carte pour TM . Définissons $\tilde{U}_\alpha = \bigcup_{x \in U_\alpha} T_x M$, $\tilde{W}_\alpha = W_\alpha \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$, $\tilde{\varphi} : \tilde{U}_\alpha \rightarrow \tilde{W}_\alpha \subset \mathbb{R}^{2n}$ est une bijection et $\{\tilde{U}_\alpha\}_\alpha$ est un recouvrement de TM .

Montrons que les cartes φ_α sont compatibles entre elles :

On prend deux cartes dans TM , $\tilde{\varphi}_\alpha$ et $\tilde{\varphi}_\beta$ définies comme suit (C'est juste la définition que l'on a vu au dessus, rien de nouveau) :

- $\tilde{\varphi}_\alpha : \tilde{U}_\alpha \rightarrow \tilde{W}_\alpha \subset \mathbb{R}^{2n}$ définie par $\tilde{\varphi}_\alpha(v) = (\varphi_\alpha(x), v_\alpha)$
- $\tilde{\varphi}_\beta : \tilde{U}_\beta \rightarrow \tilde{W}_\beta \subset \mathbb{R}^{2n}$ définie par $\tilde{\varphi}_\beta(v) = (\varphi_\beta(x), v_\beta)$

Prenons un vecteur $v \in T_x M$. Si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, alors $v \in \tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta$.

Pour que les deux cartes $\tilde{\varphi}_\alpha$ et $\tilde{\varphi}_\beta$ soient compatibles, il faut que $\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}$ soit un difféomorphisme :

$$\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x, \xi) = \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x), (d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}))_{\varphi_\alpha(x)} \xi \right)$$

Cette application est différentiable car $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est différentiable puisque $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est un difféomorphisme car ces deux cartes sont compatibles. On rappelle que toutes les applications sont C^∞ .

Proposition

Les $\tilde{\varphi}_\alpha : \tilde{U}_\alpha \rightarrow \tilde{W}_\alpha \subset \mathbb{R}^{2n}$ que l'on vient de définir au dessus donnent une structure d'une variété différentiable à TM de dimension $2n$ où $n = \dim(M)$. On aura donc :

- $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$
- $T_x M \cap T_y M = \emptyset$ si $x \neq y$

Théorème 5. *Si M est une variété lisse de dimension n , alors TM est une variété lisse de dimension $2n$ et $p : TM \rightarrow M$ définie par $v \in T_x M \rightarrow x \in M$ est une application lisse.*

Preuve du Théorème

On sait déjà que TM est une variété différentiable. Pour montrer que cette variété est lisse, montrons qu'elle est dénombrable et qu'elle est séparable.

- Dénombrabilité

Comme M est une variété, on peut choisir un atlas A qui aura un nombre de cartes dénombrable. On sait construire une variété différentiable sur TM à partir de l'atlas sur M . Donc TM est dénombrable aussi, car le nombre cartes $\tilde{\varphi}_\alpha, \alpha \in A$ sera dénombrable aussi.

- Séparabilité

On sait que M est séparable puisque c'est une variété, donc pour $x, y \in M$: soit il existe $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $x, y \in U_\alpha$ soit il existe $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ tels que $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ et $x \in U_\alpha, y \in U_\beta$

Supposons que $v_1 \in T_{x_1} M$ et $v_2 \in T_{x_2} M$ où $v_1, v_2 \in TM$ et $x_1, x_2 \in M$. On va utiliser la séparabilité de M pour montrer la séparabilité de TM :

- Cas 1 :

Si il existe U_α tel que $x_1, x_2 \in U_\alpha$, alors $v_1, v_2 \in \tilde{U}_\alpha$.

- Cas 2 :

Si il existe U_α, U_β tels que $x_1 \in U_\alpha, x_2 \in U_\beta$ et $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, alors $v_1 \in \tilde{U}_\alpha, v_2 \in \tilde{U}_\beta$ et $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta = \emptyset$

Donc soit $v_1, v_2 \in \tilde{U}_\alpha$, soit $v_1 \in \tilde{U}_\alpha$ et $v_2 \in \tilde{U}_\beta$ avec $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta = \emptyset$. Donc TM est séparable.

$p : TM \rightarrow M$ en cartes en donnée par $\tilde{W}_\alpha = W_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow W_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ qui envoie (x, ξ) sur x .
C'est donc une application lisse.

Comme TM est séparable et M aussi, on sait exactement de quel point x chaque vecteur est issu, et l'application p envoie juste les vecteurs tangents de TM sur leur point tangent correspondant.

□

14 Parallélisabilité de variétés lisses. Exemples de variétés parallélisables.

On sait que TM est une variété lisse et que l'application $p : TM \rightarrow M$ qui envoie chaque vecteur tangent de TM sur le point duquel il est issu est une application lisse.

Définition d'un champ de vecteurs

Une application lisse $v : M \rightarrow TM$ est appelée **champ de vecteurs** si $p \circ v = Id_M$, c'est à dire que $\forall x \in M, p(v(x)) = x$, c'est à dire que $v(x) \in T_x M$.

Définition d'un point singulier

$x \in M$ est un point singulier de v si $v(x) = 0 \in T_x M$

Définition, parallélisabilité

TM est parallélisable s'il existe un difféomorphisme $\Phi : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in M, \Phi : T_x M \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$ est une application linéaire. $T_x M$ est un espace vectoriel et $\{x\} \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel.

- $\Phi : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ est l'application qui envoie chaque vecteur $v \in T_x M$ tangent à $x \in M$ sur le vecteur $v_\Phi \in \mathbb{R}^n$ tangent à φ_Φ .
- $p : TM \rightarrow M$ est l'application qui envoie un vecteur tangent $v \in TM$ sur le point x auquel il est tangent. Ce point x et on le connaît car TM et M sont séparables.
- $\pi : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$ est l'application qui envoie un vecteur tangent $v_\Phi \in \mathbb{R}^n$ à $\Phi(x), x \in M$ sur $x \in M$.

Il existe des variétés parallélisables et non-parallélisables :

Exemples de variétés parallélisables

$S^1, (S^1)^n, \mathbb{R}^n$ sont parallélisables.

$T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, un vecteur tangent à \mathbb{R}^n est un élément de \mathbb{R}^n (par la translation parallèle).

L'identification des espaces tangents $T_x\mathbb{R}^n$ et $T_y\mathbb{R}^n$ avec $x \neq y$ est donnée par la translation. Cela nous donne que T_xM est une application linéaire et donc \mathbb{R}^n est parallélisable.

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, (S^1)^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

$$t \sim t + m, m \in \mathbb{Z} \text{ et } (t_1, \dots, t_n) \sim (t_1 + m_1, \dots, t_n + m_n), m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$$

La relation d'équivalence préserve la translation, on a donc la linéarité $\implies S^1, (S^1)^n$ sont parallélisables.

15 Orientabilité d'espaces vectoriels et de variétés lisses.

Définition, orientabilité

Une orientation or est une application continue entre les collections de n -tuples de vecteurs tangents à $x \in M$ et $\{\pm 1\}$ linéairement indépendants $v_1, \dots, v_n \in T_x M$, $or(v_1, \dots, v_n) = \pm 1$ avec les propriétés :

- $or(v_1, \dots, v_n) = -or(-v_1, \dots, v_n)$
- $or(v_1, \dots, v_k, \dots, v_l, \dots, v_n) = -or(v_1, \dots, v_l, \dots, v_k, \dots, v_n)$

La collection de vecteurs tangents indépendants est la collection des bases de $T_x M$.

Plus précisément :

$$Bases(TM) \stackrel{def}{=} \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_1, \dots, v_n \in T_x M, x \in M, \text{ avec } v_1, \dots, v_n \text{ sont linéairement indépendants}\}$$

$$Bases(TM) \subset TM \times \dots \times TM \text{ (multiplication } n \text{ fois), } T_x M \approx \mathbb{R}^n.$$

Dessin avec un exemple dans \mathbb{R}^2 , Cours 05.03 .

Exemple

L'orientation de \mathbb{R}^n est donnée par le déterminant :

$$(v_1, \dots, v_n) \rightarrow \det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$$

$$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n \text{ où } v_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix}$$

Définissons $or(v_1, \dots, v_n) = \text{sign}(\det(v_1, \dots, v_n))$, on a alors les propriétés :

- $or(-v_1, \dots, v_n) = \text{sign}(\det(-v_1, \dots, v_n)) = -or(v_1, \dots, v_n)$
- $or(v_1, v_2, \dots, v_n) = -or(v_2, v_1, \dots, v_n)$

Si $or(v_1, \dots, v_n) = or(u_1, \dots, u_n) \implies$ il est possible de déformer (v_1, \dots, v_n) à (u_1, \dots, u_n) (deux bases de $T_x M$) par un chemin continu, c'est à dire :

$\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow Bases(TM)$ tel que $\gamma(0) = (v_1, \dots, v_n)$, $\gamma(1) = (u_1, \dots, u_n)$ et $\gamma(t)$ est une base de $T_x M \forall t \in [0, 1]$

\implies Nous pouvons reformuler la définition d'orientation comme suit pour le cas de M convexe de dimension plus grand que 0.

Définition

Une orientation de M est une application continue et surjective qui va de $Bases(M)$ vers $\{\pm 1\}$.

Si M est connexe, (donc M est aussi connexe par arcs), la surjectivité de $or : Bases(M) \rightarrow \{\pm 1\}$ implique la surjectivité de la restriction de or sur l'ensemble de bases à $T_x M$, $\forall x \in M$ car l'existence d'une base positive (négative) à $T_y M$ implique l'existence d'une base positive (négative) à $T_x M$.

Déduisons les propriétés :

- $or(v_1, \dots, v_n) = -or(-v_1, \dots, v_n)$
- $or(v_1, \dots, v_k, \dots, v_l, \dots, v_n) = -or(v_1, \dots, v_l, \dots, v_k, \dots, v_n)$

Supposons par l'absurde que $or(v_1, \dots, v_n) = or(-v_1, \dots, v_n)$. En cartes, les signes de $det(v_1, \dots, v_n)$ coïncident, mais il existe une base (u_1, \dots, u_n) telle que $or(v_1, \dots, v_n) = -or(u_1, \dots, u_n)$ par l'hypothèse de surjectivité.

Mais nous pouvons déformer (u_1, \dots, u_n) soit à (v_1, \dots, v_n) , soit à $(-v_1, \dots, v_n)$

Cela signifie que : $sign(det(u_1, \dots, u_n)) = sign(det(v_1, \dots, v_n)) \implies (u_1, \dots, u_n)$ peut être déformé à (v_1, \dots, v_n) en bases de $T_x M$.

Exemples

Cas pour $n = 1$:

$or(v)$ peut être interprété comme le sens de notre variété de dimension 1.

Pour $n = 2$:

L'orientation vaut 1 si on tourne dans le sens antihoraire et -1 si on tourne dans le sens horaire :

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

Pour $n = 3$, l'orientation est déterminée par la règle de tire-bouchon.

16 Orientabilité et parallélisabilité. Exemples de variétés non-parallélisables.

Corollaire

Si M est une variété parallélisable, alors M est orientable.

Preuve

$$\Phi : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n, p : TM \rightarrow M, \pi_M : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M, p = \pi_M \circ \Phi$$

$\forall x \in M, \Phi|_{T_x M} : T_x M \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$ un isomorphisme des espaces vectoriels.

Introduisons $or(v_1, \dots, v_n) = \text{sign}(\det(\pi_{\mathbb{R}^n}(\Phi(v_1)), \dots, \pi_{\mathbb{R}^n}(\Phi(v_n))))$ que l'on définit $\forall v_1, \dots, v_n \in T_x M, x \in M$

Il faut vérifier notre or est bien une orientation et pour cela il faut dériver que :

- $or(v_1, \dots, v_n) = -or(-v_1, \dots, v_n)$
- $or(v_1, \dots, v_k, \dots, v_l, \dots, v_k, \dots, v_n) = -or(v_1, \dots, v_l, \dots, v_k, \dots, v_n)$

$\pi_{\mathbb{R}^n}$ et Φ nous permettent de vérifier ces 2 propriétés ??facilement ?? □

Le Ruban de Möbius n'est pas parallélisable

On définit le ruban de Möbius : $M = \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) / \sim, \varepsilon > 0$ et \sim est engendrée par $(t, s) \sim (t+1, -s)$
 $\forall t \in \mathbb{R}, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$(t, s) \rightarrow (t + 1, -s) \text{ et sa différentielle est } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$M = \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) / \sim = [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) / \sim$, un contour du Ruban de Möbius est de longueur 1, il suffit donc de regarder sur $[0, 1]$ à la place de \mathbb{R} .

Sur $[0, 1]$, le seul point à ne pas être seul dans sa classe d'équivalence est : $t \in \mathbb{Z} \implies (t, s) \sim (0, \pm s) \sim (1, \mp s)$

Tous les autres points sont seuls : $t \notin \mathbb{Z} \implies$ il existe un seul point $(t, s) \in [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ dans la classe $[(t, s)]$.

$\mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{\pi} M$ la projection définie par $\pi([0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)) = M \implies M = [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) / \sim, (0, t) \sim (1, -t)$

Définissons $U_0 = \pi((0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)), \varphi_0 : U_0 \rightarrow (0, 1) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$ par $\varphi_0 = \left(\pi|_{(0,1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)}\right)^{-1}$

Pareillement, $\pi|_{(-1/2, 1/2) \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ est aussi une bijection sur son image.

$U_1 = \pi((-1/2, 1/2) \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ et $\varphi_1 : U_1 \rightarrow (-1/2, 1/2) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$

Les deux cartes φ_0, φ_1 forment un atlas pour $M \implies$ est une variété de dimension 2.

Prenons deux bases $v_1, v_2 \in T_{(1/4, 0)}M$ et $u_1, u_2 \in T_{(3/4, 0)}M$.

Si $\text{sign}(\det(v_1, v_2)) = \text{sign}(\det(u_1, u_2))$ en fonction de la carte U_0 , alors $\text{sign}(\det(v_1, v_2)) = -\text{sign}(\det(u_1, u_2))$ en fonction de la carte U_1 car $u_1, u_2 \in T_{(3/4, 0)}M \implies \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in T_{(1/4, 0)}$ qui sont

définis par $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$

Donc $\text{sign}(\det(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)) = -\text{sign}(\det(u_1, u_2))$ en fonction de la carte U_1 , mais $\text{sign}(\det(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)) = \text{sign}(\det(u_1, u_2))$ en fonction de la carte U_0 .

Donc notre application n'est pas une orientation, donc M n'est pas orientable.

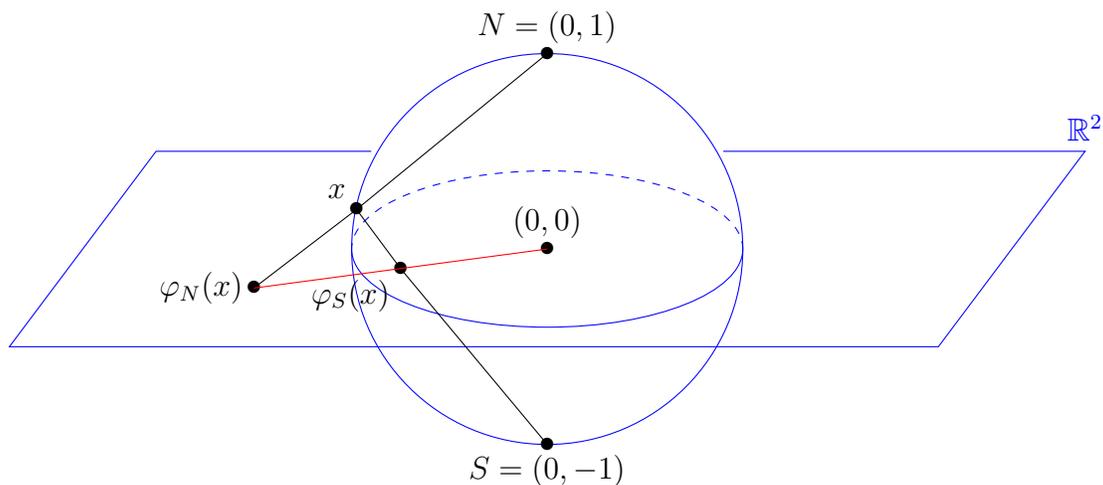
Comme il n'est pas orientable, le ruban de Möbius n'est pas non plus parallélisable d'après le Corollaire.

17 Champs de vecteurs sur la sphère. Existence d'un point singulier (énoncé). L'indice d'un point singulier.

Considérons la sphère $M = S^2$

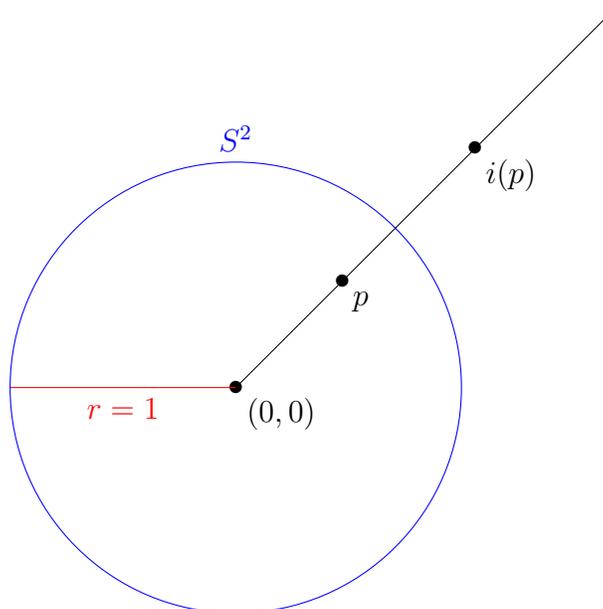
S^2 est une variété et il existe un atlas de deux cartes qui sont données par les projections stéréographiques de N et S (pôle Nord et pôle Sud) :

$$\varphi_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \varphi_S : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

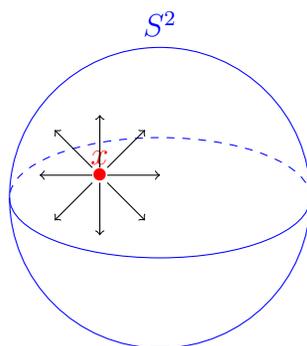


$\varphi_N(W_N \cap W_S) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\varphi_S(W_N \cap W_S) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, donc l'application de changement de cartes va aller de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vers $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Ce changement de carte est l'inversion.

L'inversion en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$: $i : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est définie par $i(p) \in [0, p)$ (la demi-droite) et $|(0, 0), p| \cdot |(0, 0), i(p)| = 1$.



Théorème 6. *Tout champ de vecteurs sur S^2 a un point singulier, c'est à dire $\exists x \in S^2$ tel que $v(x) = 0 \in T_x M$*



Remarque

Supposons que $x \in \mathbb{R}^2$ est un point singulier isolé d'un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow T\mathbb{R}^2$, c'est à dire $v(x) = 0$ et $\exists U \subset \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$ tel que $v(y) \neq 0$ si $y \in U \setminus \{x\}$.

Considérons $\varepsilon > 0$, $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset U$, $\partial B_\varepsilon(x) \approx S^1 \implies \frac{v}{\|v\|}$ nous donne un lacet $\partial B_\varepsilon(x) \approx S^1 \rightarrow S^1$.

Définition

Le degré du lacet est appelé l'indice du point singulier isolé x . Cet indice est bien défini comme $ind(x) \in \mathbb{Z}$.

La même démonstration indique que si $v : S^2 \rightarrow TS^2$ est un champ de vecteurs tel que le nombre de points singuliers est fini. \implies tout point singulier est isolé. Alors
$$\sum_{x \text{ point singulier}} \text{ind}(x) = 2$$

Cette version est une version de la formule d'Euler $S - A + F = 2$ pour un polyèdre P où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces.

P définit une sous-division polyédrale de S^2 , $\partial P \approx S^2$.

Nous pouvons trouver un champ de vecteurs tel que ses points singuliers correspondent aux sommets, arêtes et faces de P tel que un sommet ou une face \iff indice = 1 et une arête \iff indice = -1.

Les points singuliers, indice +1. Donc il n'existe pas de difféomorphisme entre les voisinages des points singuliers.

Pour l'indice -1, il faut encore voir si ce difféomorphisme existe. Et oui ! il existe. Tout champ de vecteurs sur une variété M^n est localement difféomorphe autour d'un point non-singulier au champ de vecteur "standard" sur \mathbb{R}^n : $\frac{\partial}{\partial x_1} = e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

18 Le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles ordinaires (énoncé) et ses corollaires.

Théorème 7. *Théorème fondamental de la théorie de l'EDO Soit $v : M \rightarrow TM$ un champ de vecteurs et $x \in M$ un point non-singulier, c'est à dire $v(x) \neq 0$.*

Alors, il existe un voisinage ouvert $x \in U \subset M$ et un difféomorphisme $\Phi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ tel que $(d\Phi)(v|_U) = \frac{\partial}{\partial x}|_W$

Φ est appelé le difféomorphisme de redressement.

Corollaire du Théorème

Soit M une variété, $v : M \rightarrow TM$ un champ de vecteurs, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in M$. Alors il existe une solution $\varphi : I \rightarrow M, t_0 \in I$ vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$.

Preuve du Corollaire

- Cas 1 : $v(x_0) \neq 0$, x_0 n'est pas un point singulier.

Utilisons le Théorème fondamental (théorème de redressement)

On sait donc qu'il existe $\Phi : U \rightarrow W$ tel que $d\Phi(v) = e_1, y_0 = \Phi(x_0) \in W \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}(-\infty, \infty)$.

Il existe une courbe $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $\Psi(t_0) = y_0$ et $\Psi'(t) = e_1$.

Cela nous donne une solution en la carte $\Phi : U \rightarrow W$.

$\Psi^{-1}(W)$ qui contient t_0 est ouvert $\implies \exists t_0 \in I \subset \Psi^{-1}(W)$ un intervalle ouvert. $\implies \Psi|_I : I \rightarrow W$ est une solution de $\frac{\partial y}{\partial t} = e_1(y) \implies \varphi = \Phi^{-1}(\Psi|_I) : I \rightarrow U \subset M$ est une solution de $\dot{x} = u(x)$ vérifiant $\varphi(t_0) = \Phi^{-1}(y_0) = x_0$

- Cas 2 : $v(x_0) = 0$, x_0 est un point singulier.

$\implies \varphi'(t) = v(\varphi(t))$ possède une solution constante $\varphi(t) = x_0$. $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M$ est une application constante

□

Corollaire, unicité

Soit M une variété et v un champ de vecteurs, $x_0 \in M$ un point et $t_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que $\varphi_1 : I_1 \rightarrow M$ et $\varphi_2 : I_2 \rightarrow M$, $t_0 \in I_1, I_2$ sont deux solutions de $\dot{x} = v(x)$ vérifiant la même condition initiale $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0$ Alors :

$$\varphi_1|_{I_1 \cap I_2} = \varphi_2|_{I_1 \cap I_2}$$

Preuve du Corollaire

- Cas 1 : x_0 n'est pas un point singulier.

$t_0 \in I = I_1 \cap I_2$ Soit Φ la difféomorphisme de redressement, alors $\Phi \circ \varphi_1|_I$ et $\Phi \circ \varphi_2|_I$ sont deux solutions de $\dot{y} = e_1$ définies sur le même intervalle et vérifiant la même condition initiale.

Donc $\Phi \circ \varphi_1|_I = \Phi \circ \varphi_2|_I \implies \varphi_1|_I = \varphi_2|_I$

- Cas 2 : x_0 est un point singulier.

Est-ce qu'il existe non-constante vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$

Remarque : Il faut utiliser l'hypothèse de différentiabilité continue de v mais dans notre cas, v est classe C^∞ , donc elle est continûment différentiable.

Pour démontrer le Cas 2, on va se ramener au Cas 1.

Remarque Générale : Nous pouvons considérer une EDO non-autonome $\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} = v(x, t)$, $t \in \mathbb{R}, x \in M \implies (x, t) \in M \times \mathbb{R}$.

Une équation comme cela peut être considérée comme un champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}$, une variété de dimension $n + 1$.

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, t) & \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial s} \\ \dot{t} = 1 & \dot{t} = \frac{\partial t}{\partial s} \end{cases} \text{ un système d'équation autonomes}$$

C'est équivalent à une seule équation autonome en $M \times \mathbb{R}$ avec $(v(x, t), 1)$ comme un champ de vecteurs.

Une solution de ce système est équivalente à une solution de $\dot{x} = v(x, t)$ par $t = s + t_0$.

Mais le champ de vecteurs $(v(x, t), 1)$ sur $M \times \mathbb{R}$ n'a pas de points singuliers. Nous réduisons le Cas 2 au Cas 1.

□